ENTWICKLUNG VON VERSTÄNDNIS FÜR DEN BEGRIFF DES INTEGRALS

HEINRICH BÜRGER (UNIV. WIEN)

Wie kann sich "Verständnis" für einen Begriff äußern?

Wenn ein Mensch feststellt, daß er einen Sachverhalt "verstanden" hat, dann kann dies Unterschiedliches bedeuten, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen.

- Eine Schülerin stellte fest: "Das Bruchrechnen verstehe ich." Damit meinte sie, daß sie weiß, wie man mit Brüchen rechnet, und daß sie solche Rechnungen auch durchführen kann. Verständnis in diesem Sinn kann als die Kenntnis eines Handlungsablaufes und die Fähigkeit zu dessen Durchführung angesehen werden.
- Ein Erwachsener stellte fest: "Ich habe nie verstanden, warum $(-3)\cdot(-4) = 12$ ist." Im Gespräch stellte sich heraus, daß er diese Rechnung weder mit einer Umwelterfahrung noch mit irgendeiner anderen "Vorstellung" verbinden konnte. Verständnis in diesem Sinn kann als die Fähigkeit angesehen werden, einen Sachverhalt zu vorhandenem Wissen in Beziehung zu setzen.

Verständnis für einen mathematischen Sachverhalt bzw. Begriff zu erlangen, ist vielfach ein Bedürfnis der Schüler, das ersichtlich in sehr subjektiver Weise erfüllt werden kann. Andrerseits wird die Entwicklung eines möglichst vielseitigen Verständnisses für mathematische Begriffe bzw. Sachverhalte als ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichtes angesehen, das häufig über die Erfüllung subjektiver Bedürfnisse einzelner Schüler hinausgeht.

Geht man davon aus, daß "Verständnis" zwar nicht unmittelbar feststellbar ist, daß sich aber Verständnis in der Fähigkeit äußern kann, gewisse Handlungen ausführen zu können, dann kann man diese Handlungen als Ausprägungen von Verständnis ansehen. In den Didaktischen Grundsätzen des österreichischen Lehrplans für den Mathematikunterricht an AHS werden in diesem Sinne verschiedene Ausprägungen bzw. Formen von Verständnis angeführt:

"Das Verständnis für einen Begriff kann sich darin äußern, daß man verschiedene Darstellungen geben kann, daß man inner- und außermathematische Vorstellungen mit dem Begriff verbinden kann, daß man theoretische Beziehungen zu anderen Begriffen herstellen kann, daß man formale Operationen, Argumentationen sowie Anwendungen durchführen kann und daß man Angaben zu Sinn und Zweck eines Begriffes machen kann."

Damit Schüler solche Handlungen ausführen können, müssen ihnen im allgemeinen Aufgaben gestellt werden, bei denen sie diese Handlungen, gegebenenfalls auch in verschiedenen Variationen und Situationen, durchführen müssen. Dabei ist einerseits ein hohes Maß an Selbsttätigkeit der Schüler notwendig, andrerseits sind Informationen und Hilfen des Lehrers erforderlich. Darüber hinaus sollten wesentliche Aspekte bewußt gemacht werden. Verständnis kann zumeist nicht in völlig eigenständiger Weise erworben werden.

In welchen Formen bzw. durch welches Wissen und welche Fähigkeiten kann sich das Verständnis von Schülern für den Begriff des Integrals äußern? Dazu sollen im folgenden Möglichkeiten aufgezeigt werden, die mit den Lernzielen des Lehrplans korrespondieren. Ferner werden fallweise auch Vorschläge für Zugänge im Unterricht gemacht.

Elementares Wissen über Integral und Stammfunktion

Eine elementares (triviales?) Verständnis kann sich in dem Wissen äußern, daß das Integral eine reelle Zahl, eine Stammfunktion hingegen eine Funktion ist, und in der Fähigkeit, dieses Wissen an Beispielen zu illustrieren. Etwa am Beispiel der Funktion f mit $f(x)=x^2$: das Integral $\int_0^3 x^2 dx = 9$ ist eine Zahl, die Funktion F mit $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ist eine Stammfunktion.

Auch das Wissen, daß mit $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktion bezeichnet wird, kann hier angeführt werden.

Berechnen von Integralen mit Stammfunktionen

Folgende Handlungen können als Ausprägungen von Verständnis angesehen werden:

- Durchführen von Berechnungen. Beispielsweise: $\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \ldots$
  (Die Fähigkeit, Integrale mit nichtelementaren Integrationsmethoden berechnen zu können, etwa mit der Methode der partiellen Integration, ist nicht Ausdruck eines tieferen Verständnisses für den Begriff des Integrals.)
- Verbales Beschreiben der Berechnungsmethode
- Formales Beschreiben. Etwa: $F' = f \Rightarrow \int_a^b f = F(b)-F(a)$
- Angeben von Voraussetzungen. Etwa: f muß stetig sein.

Integral als Flächeninhalt

Ausprägungen von Verständnis:

- Zeichnen der Fläche, die durch ein Integral berechnet werden kann.
- Berechnen von Flächeninhalten.
- Wissen, unter welcher Voraussetzung ein Integral gleich einem Flächeninhalt ist; Erkennen, wenn ein Integral nicht Inhalt einer Fläche ist (z.B. $\int_0^3 (x-1)dx$).
- Wissen, daß mit Hilfe des Integrals der Begriff des Flächeninhaltes definiert werden kann.

Berechnen von Volumina

Ausprägungen von Verständnis:

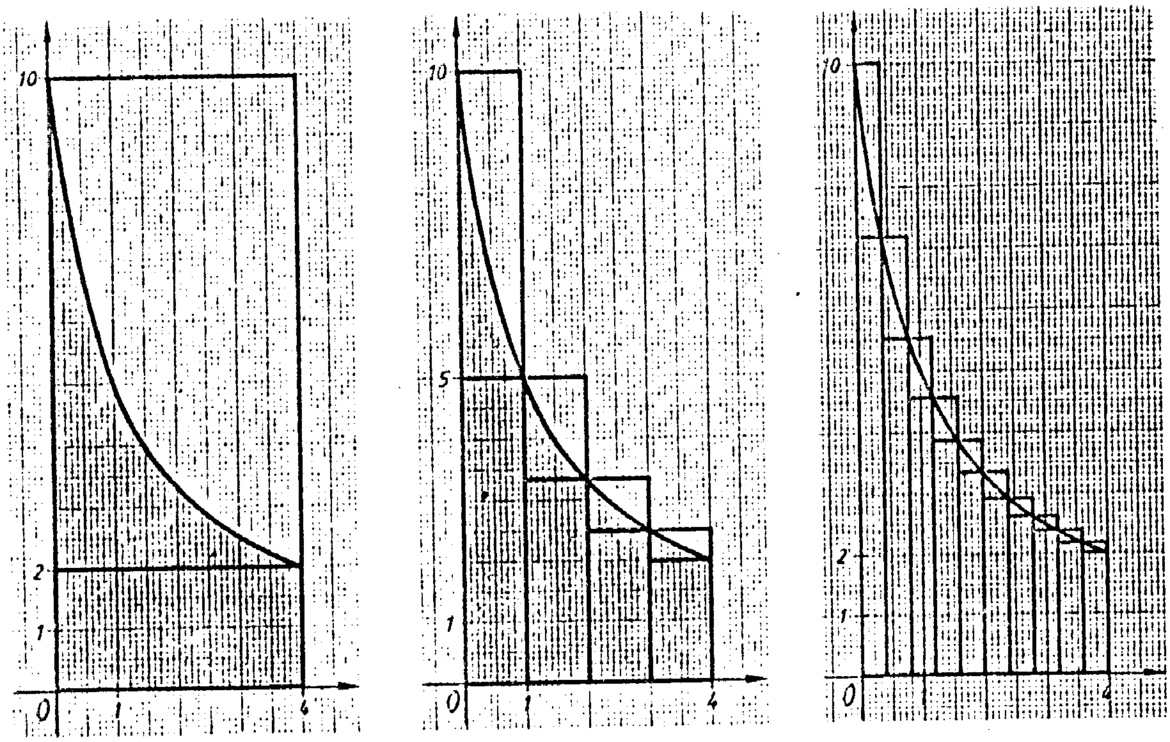
- Berechnen der Volumina von Rotationskörpern unter Verwendung der Formeln $V = \int_a^b y^2 dx$ und $V = \int_c^d x^2 dy$.
- Erklären bzw. Begründen dieser Formeln.
  (Dies setzt allerdings das im folgenden behandelte Verständnis des Integrals als einer Zahl, die aus Summen von Produkten hervorgeht, voraus.)

- Aufstellen von Formeln zur Berechnung des Volumens von Körpern. Beispielsweise: Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide.

Integral als Ergebnis eines Grenzprozesses ausgehend von Summen

Ausprägungen von Verständnis:

- Anschauliches Darstellen, allenfalls verbunden mit einer verbalen Darstellung. Beispielsweise:



- Näherungsweises Berechnen von Integralen mit Unter-, Ober- oder Zwischensummen.
- Formales Beschreiben von Unter-, Ober- oder Zwischensummen. Etwa Darstellen von Unter- und Obersummen einer in einem Intervall [a,b] streng monoton fallenden Funktion bei Zerlegung des Intervalls in 4 oder n gleich lange Teilintervalle der Länge Δx und den Zerlegungspunkten

  $a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n=b$:

  $U = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + f(x_4)\cdot\Delta x$

  $O = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x$ bzw.

$U = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x$

$O = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$

- Beschreiben des Grenzprozesses.

  Etwa:

  Der Unterschied O-U zwischen Ober- und Untersummen wird beliebig klein, wenn n genügend groß ist.

  Oder:

  Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gilt:

  $$O-U = [f(x_0) - f(x_n] \cdot \Delta x = [f(a) - f(b)] \cdot \frac{b-a}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow \quad n > \frac{[f(a)-f(b)] \cdot (b-a)}{\varepsilon}$$

  Oder:

  Die aus Unter- und Obersummen gebildeten Zahlen konvergieren gegen denselben Grenzwert.

Bemerkung: Diese Beschreibungen des Grenzprozesses können im Unterricht durch näherungsweise Berechnungen in Verbindung mit Genauigkeitsuntersuchungen vorbereitet werden. In Beispielen mit vorgegebenen Funktionen kann etwa untersucht werden, in wie viele Teile ein gegebenes Intervall zerlegt werden muß, damit $O-U < 0{,}1$ oder $O-U < \varepsilon$ ist [Bürger 1992, S. 18,19].

Integral als formaler Begriff

Mögliche Ausprägungen von Verständnis:

- Beschreiben bzw. Definieren des Integrals gestützt auf eine algebraische Definition von Unter-, Ober- oder Zwischensummen, jedoch ohne Rückgriff auf anschauliche Deutungen.

  Etwa: Die Funktion f sei im Intervall [a,b] definiert, die Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien Zerlegungspunkte von [a,b], ferner sei x_i' eine Minimumstelle von f in [a,b] und $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

  Dann heißt $U = f(x_1') \cdot \Delta x_1 + f(x_2') \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(x_n') \cdot \Delta x_n$ die Untersumme von f in [a,b].

  Das Integral $\int_a^b f$ ist jene Zahl, die zwischen allen Untersummen und allen Obersummen von f in [a,b] liegt. Also: $U \le \int_a^b f \le O$ für alle Untersummen U und alle Obersummen O von f.

- Angeben von Voraussetzungen für die obigen Definitionen. Etwa: Beschränktheit, Monotonie oder Stetigkeit von f in [a,b] als Voraussetzungen für die Existenz von Unter- bzw. Obersummen. Monotonie oder Stetigkeit von f in [a,b] für die Existenz des Integrals.
- Angeben von Beispielen, die zeigen, daß bei Fehlen solcher Voraussetzungen, die Existenz nicht gesichert sein muß.

Bemerkungen:

Um den Begriff des Integrals möglichst vielfältig deuten zu können (beispielsweise als Arbeit oder als Volumen) und entsprechend anwenden zu können, ist es notwendig, daß dieser Begriff nicht auf spezielle Deutungen, vor allem nicht ausschließlich auf die Deutung als Flächeninhalt, fixiert ist. Das Erfassen der abstrakten mathematischen Struktur des Integralbegriffes scheint eine wesentliche Voraussetzung für neue Interpretationen und Anwendungen zu sein.

Selbstverständlich kann der Begriff des Integrals abweichend von dem obigen Vorschlag mit geringerer Präzision oder in anderer Weise beschrieben bzw. definiert werden. Eine Definition als Grenzwert von Zahlenfolgen von Unter- bzw. Obersummen oder eine Definition als Supremum der Menge aller Untersummen sind Beispiele für weitere Definitionsmöglichkeiten. Wesentlich ist, daß mit dem Integral die Vorstellung einer Zahl verbunden ist, die durch Unter-, Ober- oder Zwischensummen mit beliebiger Genauigkeit approximiert oder festgelegt werden kann.

Ein Zugang zum formalen Integralbegriff (Bürger 1992, S.14-23):

Die Geschwindigkeit eines Körpers zum Zeitpunkt t sei für $0 \le t \le 3$ durch $v(t) = \frac{10}{t+2}$ gegeben. Gesucht ist die Länge w(0;3) des Weges, den der Körper im Zeitintervall [0;3] zurücklegt. Abschätzungen für w(0;3) erhält man durch Berechnung von Weglängen bei Annahme von gleichförmigen Bewegungen.

Würde sich der Körper im Intervall [0;3] mit der kleinsten Geschwindigkeit v(3)=2 bewegen, würde er einen Weg der Länge v(3)·3 zurücklegen; bei Bewegung mit der größten Geschwindigkeit v(0)=5 würde sich die Weglänge v(0)·3 ergeben. Somit erhält man: $v(3)\cdot 3 \le w(0;3) \le v(0)\cdot 3$ bzw. $6 \le w(0;3) \le 15$

Eine genauere Abschätzung erhält man durch Zerlegung des Intervalls [0;3] in Teilintervalle und Berechnung der Weglängen bei jeweils kleinster bzw. größter Geschwindigkeit in den Teilintervallen. Bei Zerlegung in 3 gleichlange Teilintervalle der Länge 1 ergibt sich dann:

$$v(1)\cdot 1+v(2)\cdot 1+v(3)\cdot 1 \le w(\dot{a};b) \le v(0)\cdot 1+v(1)\cdot 1+v(2)\cdot 1$$

Auf diese Weise erhält man "Untersummen" und "Obersummen" als Schranken für w(0;3). Nach weiteren numerischen Berechnungen, die zu genaueren Einschränkungen führen und auch mit Computern durchgeführt werden können, kann man allgemeine Formeln für Untersummen und Obersummen bei einer Zerlegung von [0;3] in n gleich lange Teilintervalle der Länge $\Delta t = \frac{3}{n}$ aufstellen:

$$U = v(t_1)\cdot\Delta t + v(t_2)\cdot\Delta t + \ldots + v(t_n)\cdot\Delta t$$

$$O = v(t_0)\cdot\Delta t + v(t_1)\cdot\Delta t + \ldots + v(t_{n-1})\cdot\Delta t$$

Aus diesen Formeln ergibt sich:

$$O-U = [v(t_0)-v(t_n)]\cdot\Delta t = \frac{9}{n}$$

Aus dieser Beziehung kann ermittelt werden, in wiele Teile [0;3] zerlegt werden muß, um w(0,3) mit einer vorgegebenen Genauigkeit berechnen zu können. Beispielsweise:

$$O-U = \frac{9}{n} = 0{,}01 \iff n = 900$$

Ferner ergibt sich, daß die Differenz beliebig klein gemacht werden kann:

$$O-U = \frac{9}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{9}{\varepsilon}$$

Wenn man nun den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{10}{x+2}$ im Intervall [0;3] durch Berechnung von Inhalten von Rechtecken, die über gleich langen Teilintervallen von [0;3] errichtet werden, abschätzt, dann erhält man die gleichen numerischen Ergebnisse und völlig gleichartig gebaute Formeln für Unter- und Obersummen wie bei der

Abschätzung der Weglänge w(0;3) für die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t) = \frac{10}{t+2}$.

Dieses Beispiel und gegebenenfalls noch weitere analoge Beipiele zeigen, daß es sinnvoll sein kann, Unter- und Obersummen formal zu definieren und letztlich einen formalen Integralbegriff, losgelöst von anschaulichen oder inhaltlichen Deutungen, zu untersuchen.

Deuten und Anwenden des Integralbegriffs

Ausprägungen von Verständnis:

- Deuten des Integrals als Flächeninhalt, als Weglänge, als Arbeit, als Volumen, ...
  (Dabei werden Flächeninhalt, Weglänge, ... als undefinierte, aber intuitiv vertraute Begriffe angesehen.)
- Definieren von Begriffen mit Integralen.
  (Dabei kann es sich auch um intuitiv vertraute Begriffe, wie Flächeninhalt, Weglänge, ... handeln.)
- Beschreiben eines Musters, nach dem die genannten Deutungen bzw. Definitionen erfolgen können.
  Etwa:
  Ausgegangen wird von einer Formel der Form $Z = Y \cdot X$, wobei Y und X vorgegebene (konstante) Größen sind. Beispielsweise:

$A = h \cdot l$	$s = v \cdot t$	$W = F \cdot s$	$V = G \cdot h$
(Rechtecksinhalt)	(Weglänge)	(Arbeit)	(Zylindervolumen)

  Nun wird untersucht, wie die Größe Z berechnet bzw. definiert werden kann, wenn Y nicht konstant ist, also durch eine (nicht konstante) Funktion beschrieben werden kann, die in einem Intervall [a,b] mit der Länge $b-a = X$ definiert ist:

h variabel	v variabel	F variabel	G variabel
$b-a = l$	$b-a = t$	$b-a = s$	$b-a = h$

  Unter- und Obersummen dieser Funktion können dann zur Approximation der Größe Z, das Integral der Funktion in [a,b] kann zur Berechnung bzw. Definition von Z herangezogen werden.
- Beschreiben des Zusammenhanges zwischen Integral und Mittelwert.

Zusammenhang zwischen Integral und Stammfunktion

Ein instrumentelles Verständnis dieses Zusammenhanges, das sich im wesentlichen darauf beschränkt, daß Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden können, wurde bereits behandelt. Ein vertieftes Verständnis kann sich in der Fähigkeit äußern, die beiden folgenden Sätze begründen zu können und sie anwenden zu können.

Satz 1: Ist f stetig in $[a,b]$ und F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $\int_a^b f = F(b)-F(a)$.

Satz 2: Ist f stetig in $[a,b]$, dann ist die Integralfunktion $I\colon x \mapsto \int_a^x f$ eine Stammfunktion von f.

Satz 1 kann zur Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen dienen. Satz 2 sichert die Existenz von Stammfunktionen für stetige Funktionen und ermöglicht die Berechnung von Werten einer Stammfunktion mit Unter-, Ober- oder Zwischensummen.

Im folgenden werden zwei Möglichkeiten für Begründungen aufgezeigt, die aber auch weniger präzise und damit kürzer durchgeführt werden könnten.

1. Begründungsmöglichkeit:

Bei dieser Begründung wird der Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwendet: Ist eine Funktion F differenzierbar in $[a,b]$, dann gibt es eine Stelle $p\in[a,b]$, sodaß gilt:

$$F'(p) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß dieser Satz bewiesen werden muß, wohl aber daß er an einer Zeichnung erläutert werden kann.

Begründung von Satz 1:

Da $F' = f$ ist, gilt für eine beliebige Zwischensumme:

$$S = f(\bar{x}_1)\cdot\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(\bar{x}_n)\cdot\Delta x_n =$$

$$= F'(\bar{x}_1)\cdot\Delta x_1 + F'(\bar{x}_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + F'(\bar{x}_n)\cdot\Delta x_n$$

Dabei kann $\bar{x}_i$ eine beliebige Stelle aus dem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ sein. Man kann somit $\bar{x}_i$ so wählen, daß nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$F'(\bar{x}_i) = \frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \quad \text{bzw.} \quad F'(\bar{x}_i)\cdot\Delta x_i = F(x_i)-F(x_{i-1})$$

Damit erhält man folgende Zwischensumme:

$$S = [F(x_1)-F(x_0)] + [F(x_2)-F(x_1)] + \ldots + [F(x_n)-F(x_{n-1})] =$$

$$= F(x_n)-F(x_0) = F(b)-F(a)$$

Daraus erkennt man, daß bei jeder Zerlegung von $[a,b]$ eine Zwischensumme gefunden werden kann, die den konstanten Wert $F(b)-F(a)$ hat. Für jede Zerlegung ist aber die zugehörige Untersumme kleiner-gleich jeder zugehörigen Zwischensumme. Damit gilt für jede Untersummen U: $U \leq F(b)-F(a)$. Analog gilt für jede Obersumme O: $F(b)-F(a) \leq O$.

Somit gilt für alle Untersummen U und alle Obersummen O:

$$U \leq F(b)-F(a) \leq O$$

Ebenso gilt für alle Untersummen U und alle Obersummen O:

$$U \leq \int_a^b f \leq O$$

Da f stetig in $[a,b]$ ist, gibt es nur eine Zahl, die zwischen allen Unter- und Obersummen von f in $[a,b]$ liegt. Also gilt:

$$\int_a^b f = F(b)-F(a) \qquad \square$$

Begründung von Satz 2:

Für die Integralfunktion I und für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt nach Satz 1: $I(x) = \int_a^x f = F(x)-F(a)$.

Die Funktionen I und F unterscheiden sich also nur um eine additive Konstante. Somit ist auch I eine Stammfunktion von f. $\square$

2. Begründungsmöglichkeit:

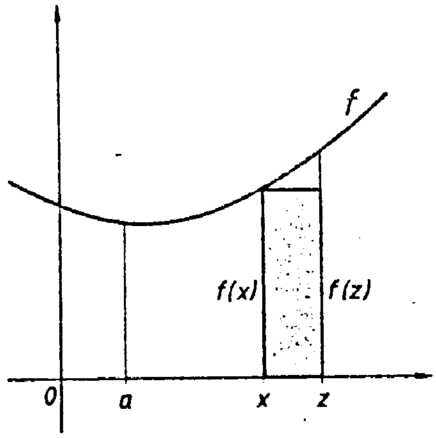
Bei dieser Begründung wird die Deutung des Integrals $\int_a^x f$ als Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $[0;x]$ verwendet.

Begründung von Satz 2:

Für den Differenzenquotienten der Integralfunktion I gilt:

$$\frac{I(z)-I(x)}{z-x} = \frac{1}{z-x}\cdot\left[\int_a^z f - \int_a^x f\right] = \frac{1}{z-x}\cdot\int_x^z f$$

Der Flächeninhalt, der dem Integral $\int_a^z f$ entspricht, ist annähernd gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen (z-x) und f(x), also:



$$\int_a^z f \approx f(x)\cdot(z-x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{z-x}\cdot\int_x^z f \approx f(x)$$

Da f stetig ist, also $\lim\limits_{z\to x} f(z) = f(x)$ ist, kann daraus geschlossen werden:

$$\lim_{z\to x}\frac{I(z)-I(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{1}{z-x}\cdot\int_x^z f = f(x)$$

Also: $I'(x) = f(x)$ □

(Die letzten Schritte dieser Begründung können bei Verwendung der Grenzwertdefinition exaktifiziert werden.)

Begründung von Satz 1:

Da die Integralfunktion I eine Stammfunktion von f ist, gilt für jede weitere Stammfunktion F von f:

$$I(x) = F(x) + C$$

Daraus und aus $\int_a^a f = 0$ folgt:

$$\int_a^b f = I(b) = I(b) - I(a) = [F(b)+C] - [F(a)+C] = F(b)-F(a) \quad \square$$

Literatur:

- Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen.
  In: Bürger, H. u.a.: Mathematik Oberstufe AHS, Kommentar.
  Wien 1991, österr. Bundesverlag.
- Bürger, H. u.a: Mathematik Oberstufe 4. Wien 1992, Verlag HPT.